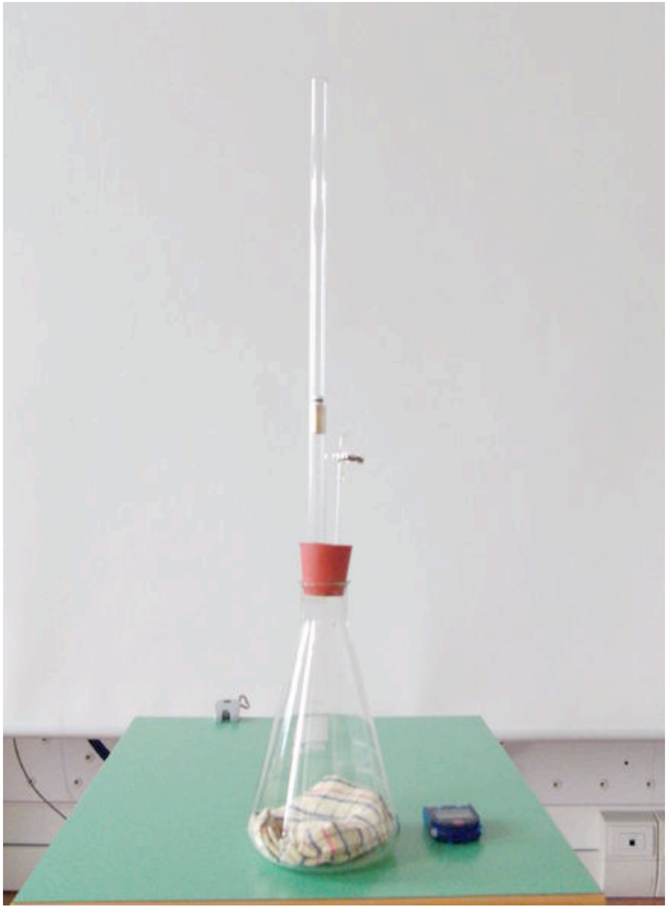
MISURA SPERIMENTALE DI GAMMA PER UN GAS PERFETTO

La misura di γ ($\gamma = C_{mP}/C_{mV}$) per un GP (gas perfetto) può essere fatta per mezzo di un tubo di vetro calibrato (ovvero con una sezione interna estremamente regolare, di forma circolare, e uniforme lungo tutta la lunghezza del tubo), di una beuta e di un cilindretto di acciaio (calibrato anch'esso) di diametro uguale al diametro interno del tubo di vetro.



In figura è rappresentato l'assemblaggio di questi elementi necessario per realizzare l'esperimento. Il tappo di gomma a forma di tronco di cono, che si può osservare nella figura, deve avere un foro nel quale va infilato il tubo di vetro. Il tappo ovviamente deve garantire la tenuta, ovvero deve impedire che differenze di pressione fra l'interno della beuta e l'ambiente provochino fughe di gas (aria) dall'interno verso l'esterno o viceversa. In questo modo il cilindretto di acciaio, una volta infilato nel tubo di vetro, non cadrà all'interno della beuta, ma si ritroverà a galleggiare sull'aria, grazie alla tenuta del tappo di gomma e grazie alla tenuta della propria superficie laterale contro la parete interna del tubo di vetro. Se si mantiene la beuta in posizione verticale, come in figura, quando si introduce il cilindretto nel tubo dall'estremità superiore di quest'ultimo, il cilindretto inizialmente accelera verso il basso, a causa del proprio peso, ma poi decelera, a causa dell'aumento di pressione dell'aria che si viene a creare all'interno della beuta, fino a fermarsi, per poi risalire; in sostanza il cilindretto compie delle oscillazioni verticali con periodo costante; queste ultime risultano smorzate per via dell'attrito tra la superficie laterale del cilindretto e la parete interna del tubo di vetro.
Come vedremo più avanti la misura del periodo di oscillazione del cilindretto permette di determinare il valore di γ del gas (aria) che viene continuamente compresso e decompresso durante le oscillazioni.
Il secondo tubo di vetro, molto più piccolo di quello principale, che si può osservare in figura, infilato anch'esso nel tappo di gomma, non è essenziale ai fini dell'esperimento che stiamo per descrivere; esso serve per collegare una sonda di pressione con l'interno della beuta. E' possibile in questo modo registrare istante per istante il valore della pressione. Se inoltre si effettua con una telecamera una ripresa delle oscillazioni del cilindretto, si può risalire, dall'analisi del filmato, ai valori istantanei del volume del gas interno alla beuta e verificare quale relazione lega, durante le oscillazioni del cilindretto, la pressione e il volume del gas (si può verificare che tale relazione è quella caratteristica delle trasformazioni adiabatiche: $P \cdot V^{\gamma}$ = costante).
Il tubicino di vetro secondario deve ovviamente essere tenuto chiuso qualora non venga collegata ad esso la sonda di pressione durante l'esperimento.

Di seguito indicheremo con:

V il volume dell'aria nella beuta;
P la pressione dell'aria nella beuta;
P_{EQ} la pressione dell'aria nella beuta quando il cilindretto è nella sua posizione di equilibrio;
P_0 la pressione atmosferica;
m la massa del cilindretto;
A l'area della sezione interna del tubo di vetro, ovvero l'area di base del cilindretto.

Quando il cilindretto si trova nella propria posizione di equilibrio lungo il tubo, la pressione dell'aria nella beuta deve uguagliare la somma della pressione dell'aria esterna (pressione atmosferica) e della pressione dovuta al peso del cilindretto:

$$P_{EQ} = P_0 + \frac{mg}{A} \tag{1}$$

Definiamo un asse X lungo il tubo, con l'origine O in corrispondenza della posizione di equilibrio del cilindretto e con l'orientazione verso l'alto. Ora consideriamo il cilindretto in una posizione x diversa da quella di equilibrio ($x \neq 0$). Il sistema è fatto in modo che le variazioni di volume, e quindi anche le variazioni di pressione, del gas interno alla beuta siano percentualmente molto piccole durante le oscillazioni del cilindretto. Infatti il tubo di vetro ha un volume molto più piccolo di quello della beuta; perciò spostamenti del cilindretto anche di una ventina di centimetri dalla posizione di equilibrio, comportano piccole variazioni di V e di P del gas.
Quindi possiamo considerare infinitesime le variazioni di P e di V, e di grandezze definite per mezzo di P e di V; indicheremo con dP, dV, ecc. tali variazioni (anziché con ΔP, ΔV, ecc.) per il fatto che sono variazioni infinitesime.
Allora quando il cilindretto si trova in una posizione x ($x \neq 0$) la pressione P varia, rispetto al valore (1), di una quantità dP; e sul cilindretto agisce una forza totale:

$$F = A \cdot dP \tag{2}$$

che determina, per il cilindretto, un'accelerazione:

$$a = \frac{A \cdot dP}{m}$$

La trasformazione del gas, causata dallo spostamento del cilindretto, è adiabatica. Perciò vale:

$$P \cdot V^{\gamma} = costante$$

Quindi allo spostamento x del cilindretto corrisponde una variazione:

$$d(P \cdot V^{\gamma}) = 0 \tag{3}$$

Vediamo ora come esprimere la variazione infinitesima della quantità $P \cdot V^{\gamma}$. A questo riguardo separiamo in due parti la seguente discussione.
a) La variazione infinitesima di una quantità che è il prodotto di due fattori:

$$d(a \cdot b)$$

è uguale a:

$$d(a \cdot b) = a \cdot db + b \cdot da \tag{4}$$

Infatti:

$$d(a \cdot b) = (a + da)(b + db) - ab = ab + a \cdot db + b \cdot da + da \cdot db - ab \simeq a \cdot db + b \cdot da$$

dove nell'ultimo passaggio si è trascurato il termine $da \cdot db$ in quanto, essendo il prodotto di due quantità infinitesime, è molto più piccolo degli altri termini, che sono invece il prodotto di una quantità infinitesima per una quantità finita.

b) La variazione infinitesima di una quantità che è una potenza con esponente intero:

$$d(a^n)$$

si può determinare applicando n volte la formula (4):

$$d(a^n) = d(a \cdot a^{n-1}) = a \cdot d(a^{n-1}) + da \cdot a^{n-1} = a \cdot [a \cdot d(a^{n-2}) + a^{n-2} \cdot da] + da \cdot a^{n-1} =$$

$$= a^2 \cdot d(a^{n-2}) + a^{n-1} \cdot da + a^{n-1} \cdot da = a^2 [a \cdot d(a^{n-3}) + a^{n-3} \cdot da] + 2a^{n-1} da =$$

$$= a^3 d(a^{n-3}) + a^{n-1} da + 2a^{n-1} da = a^3 d(a^{n-3}) + 3a^{n-1} da = \ldots\ldots = a^k d(a^{n-k}) + ka^{n-1} da$$

fino ad arrivare a k = n, per cui risulta:

$$d(a^n) = a^n d(a^{n-n}) + na^{n-1} da = a^n d(a^0) + na^{n-1} da = a^n d(1) + na^{n-1} da = a^n \cdot 0 + na^{n-1} da =$$

$$= na^{n-1} da$$

Quindi la formula è la seguente:

$$d(a^n) = na^{n-1} da \tag{5}$$

Si può dimostrare che questa formula è corretta anche quando la potenza ha esponente non intero:

$$d(a^\alpha) = \alpha a^{\alpha-1} da \qquad \text{con:} \quad \alpha \in \mathbb{R} \tag{6}$$

A questo punto possiamo esprimere la variazione infinitesima di $P \cdot V^\gamma$. Applichiamo dapprima la (4):

$$d(P \cdot V^\gamma) = V^\gamma \cdot dP + P \cdot d(V^\gamma)$$

e poi applichiamo la (6):

$$d(P \cdot V^\gamma) = V^\gamma \cdot dP + P \cdot d(V^\gamma) = V^\gamma \cdot dP + P \cdot \gamma V^{\gamma-1} dV \tag{7}$$

Perciò possiamo riscrivere l'equazione (3) per mezzo della (7):

$$d(P \cdot V^\gamma) = = V^\gamma \cdot dP + P \cdot \gamma V^{\gamma-1} dV = 0 \tag{8}$$

Dividendo la (8) per V^γ otteniamo:

$$dP = -\frac{\gamma P dV}{V} \tag{9}$$

Essendo:

$$dV = A \cdot x$$

la (9) si può riscrivere come segue:

$$dP = -\frac{\gamma P A x}{V}$$

che per la (2) diventa:

$$F = ma = AdP = -\frac{\gamma P A^2}{V} x \tag{10}$$

Essendo γ, P, A, V tutte quantità costanti o quasi costanti, la (10) rappresenta una forza di tipo elastico:

$$F = -Kx$$

con:

$$K = \frac{\gamma P A^2}{V}$$

Perciò il moto del cilindretto sarà armonico, caratterizzato da una frequenza angolare:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{\gamma P A^2}{mV}}$$

e quindi da un periodo:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{mV}{\gamma P A^2}} \tag{11}$$

Dall'equazione (11) possiamo ricavare γ:

$$\gamma = \frac{4\pi^2 m V}{P A^2 T^2} \tag{12}$$

Nella (12) γ risulta espresso in funzione di grandezze che sono tutte misurabili: m è la massa del cilindretto; V è il volume medio del gas, ovvero il volume interno della beuta più il volume della parte di tubo che si trova al di sotto del cilindretto quando questo è nella posizione di equilibrio; P è la pressione media del gas, ovvero la pressione atmosferica P_0; A è l'area della sezione interna del tubo; T è il periodo di oscillazione del cilindretto, che è facilmente misurabile con un cronometro.